ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 8

КЛАССИЧЕСКИЕ ПАРАДОКСЫ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

1. Парадокс гральних кубиків

А) Історія парадоксу

Гра в кубики була найпопулярнішою азартною грою до кінця середньовіччя. Саме слово “азарт” походить від арабського слова “аль-зар”, що перекладається як “гральний кубик”. Якщо картярські ігри стали популярними в Європі лише в XIV віці, то ця користувалася успіхом ще в Древньому Єгипті і пізніше в Греції, а потім в Римській імперії. За грецькою легендою, її запропонував *Паламедей* для розваги грецьких солдат, які нудьгували в очікуванні битви за Трою. Найбільш ранньою книжкою з теорії ймовірностей є “Книга про гру в кубики” *Джероламо Кардано* (1501-1576). Вона була опублікована аж в 1663 р. Мабуть, з цієї причини *Галілей* став займатися тією ж задачею, хоча вона була розв′язана в книзі Кардано. Галілей також написав трактат на цю тему десь між 1613 і 1624 р.

Б) Парадокс

При підкиданні двох кубиків 9 і 10 можна отримати двома способами: 9=3+6=4+5, 10=4+6=5+5. Якщо кубиків три, то 9 і 10 отримуються шістьма способами. Чому ж 9 з′являється частіше на двох кубиках, а 10 на трьох?

В) Пояснення

Аж дивно, що ця задача вважалася страшенно складною. І *Кардано,* і *Галілей* вказували на необхідність врахування порядку випадання чисел.

Г) Зауваження

i) Помилялися і *Лейбніц*, один з творців диференціального і інтегрального числень, і *Даламбер*, один з великих авторів знаменитої Французької енциклопедії. Якось Даламберу задали питання: з якою ймовірністю монета, підкинута двічі, хоча б один раз випаде гербом? Його відповідь була 2/3, оскільки він вважав, що є три випадки і серед них лише один несприятливий. Ця точка зору була навіть опублікована в Енциклопедії в 1754 р.

ii) Ця задача певним чином зв′язана з напрямками фізики XIX і XX століть. Нехай замість кубика ми маємо справу з фізичними частинками. Кожна грань кубика відповідає тепер фазовій комірці, в якій частинка опиняється випадковим чином і яка характеризує її стан. В цьому випадку гра в кубики еквівалента моделі *Максвелла-Больцмана* для фізичних частинок. В цій моделі, яка звичайно використовується для молекул газу, кожна частинка з рівними шансами потрапляє в довільну комірку, так що при заданні простору рівноможливих подій слід враховувати порядок так само, як і в задачі про кубики. Існує інша модель, в якій частинки нерозрізнимі, і тому при підрахунку рівноможливих подій порядок не треба брати до уваги. Цю модель названо іменами *Бозе* і *Ейнштейна*. Використовуючи цю термінологію, можна сказати, що гра в кубики описується моделлю *Максвелла-Больцмана*, а не *Бозе-Ейнштейна*. Слід вказати, що жодна з цих моделей не є коректною для зв′язаних електронів, оскільки при цьому в одній комірці може опинитися не більше однієї частинки. Тут виникає модель *Фермі-Дірака*. Крім вказаних трьох моделей, існує велика кількість інших.

2. Парадокс де Мере

А) Історія парадоксу

Мабуть, *Лейбніц* вперше розказав про те, як відомий французький гравець *де Мере* по дорозі в свій маєток в Пуату зустрів *Блеза Паскаля* і поставив перед ним дві задачі. Ці задачі Паскаль обговорював у 1654 р. у своєму листуванні з *П′єром де Ферма*, що проживав у Тулузі. Обидва вчених дійшли однакового результату, що вельми обрадувало Паскаля. В своєму листі він відмічав: “Я бачу, що істина однакова і в Тулузі, і в Парижі.” Ейнштейн Оре, професор Йєльського університету, правада, стверджує, що парадокси, приписувані де Мере, насправді були відомі набагато раніше, справа лише в тому, що Паскаль про них не знав. Невірно й те, що шевальє був пристрасним гравцем. Парадокси цікавили його скоріш теоретично, і тому його не задовольнило, що Паскаль “всього-навсього” розв′язав задачу, підтвердивши правильну відповідь, яку де Мере вже знав. Шевальє не зміг зрозуміти, як пояснюється парадокс.

Б) Парадокс

При чотирьох підкиданнях одного грального кубика ймовірність того, що як мінімум один раз випаде 1, більша ½. В той же час при 24 підкиданнях двох кубиків ймовірність того, що як мінімум один раз випадуть дві 1 одночасно, менша ½. Це здається дивним, оскільки шанси отримати одну 1 в шість раз більші, ніж шанси випадання двох 1, а 24 якраз в 6 раз більше 4.

В) Пояснення парадоксу

Прості підрахунки показують, що при k підкиданнях одного кубика потрібна ймовірність дорівнює

$$1-(5/6)^k,$$

що менше ½ при k=3 і більше ½ при k=4. Так само друга потрібна ймовірність дорівнює

$$1-(35/36)^k,$$

що менше ½ при k=24 і більше ½, починаючи з k=25. Отже, "критичне значення" для одного кубика дорівнює 4, а для двох дорівнює 25. Цей безумовно правильний розв′язок не задовольнив де Мере, оскільки відповіль він вже знав, але з розв′язку так і не зрозумів, чому відповідь не узгоджується з "правилом пропорційності критичних значень", стверджуючим, що коли ймовірність зменшується в 6 раз, то критичне значення зростає в 6 раз (4:6=24:36). Абрахам де Муавр (1667-1754) у своїй книзі "Доктрина шансів" , опублікованій в 1718 р., довів, що "правило пропорційності критичних значень" недалеке від істини. Так, якщо p - ймовірність деякої події, то критичне значення k можна знайти з рівняння

$$(1-p)^x=½.$$

Тоді критичне значення буде найменшим цілим числом, більшим x. Оскільки

$$x = - \ln 2/\ln(1-p) = \ln 2/(p+p^2/2+\ldots),$$

то при можливості знехтувати значенням $p^2/2$ "правило пропорційності критичних значень" близьке до істини. Сам де Муавр використовував наближену формулу $x \approx \ln 2/p$ для дослідженняпитань, пов′язаних з Лондонською лотереєю. В цьому випадку значення p було 1/32, а для p=1/32 точне значення x = 22.135, а наближена формула дає 22.08. Парадокс де Мере виникає тому, що при p=1/6 велияина $p^2/2$ і інші доданки в знаменнику ще не досить малі. Отже, "правило пропорційності критичних значень" є правилом , вірним асимптотично, і помилка від його застосування росте з ростом p. Це й є справжнім розв′язком парадоксу.

Г) Зауваження

Типове неправильне розв′язання задачі де Мере йде аж до Кардано. Він міркував так: ймовірність отримати пару одиниць дорівнює 1/36, значит, щоб з імовірністю ½ отримати пару одиниць як мінімум один раз, треба зробити рівно 18 підкидань. Якщо так міркувати, то при підкиданні кубика більше 36 раз така ймовірність стане більшою 1!

3. Парадокс розділу ставки

А) Історія парадоксу

Цей парадокс було вперше опубліковано в Венеції в 1494 р. в книзі *Фра Лука Паччолі* "Сума знань з арифметики, геометрії, відношень і пропорційності". В цій книзі вперше використовувалося слово "мільйон" і пояснювалася подвійна бухгалтерія. Цікаво відзначити, що в Мілані Фра Лука близько подружився з *Леонардо да Вінчі*, який згодом ілюстрував працю Фра Лука "Про божественні пропорції". Багато що вказує на більш давнє арабське походження парадоксу розділу ставки. Якою старою не була б ця проблема, залишається фактом, що на її правильне розв′язання пішдо дуже багато часу. Невірний розв′язок дав *Нікколо Тарталья,* хоча він був досить геніальним, щоб за одну ніч відкрити формулу коренів кубічного рівняння. Після декількох невдалих спроб Паскаль і Ферма в 1654 р. незалежно один від одного знайшли правильну відповідь.

Б) Парадокс

Два гравці грають в чесну гру (тобто у обох шанси виграти в одній партії однакові) і домовляються, що весь приз отримає той, хто першим виграє 6 партій. Насправді гра зупинилася тоді, коли перший гравець виграв 5 партій, а другий 3. Як справедливо розділити приз? Ніякого парадоксу тут, звичайно, немає, але невдалі спроби деяких видатних вчених знайти розв′язок, а також неправильні суперечливі відповіді таку легенду створили. За однією відповіддю, приз треба розділити пропорційно виграним партіям, тобто у відношенні 5:3. Тарталья пропонував розділити його у відношенні 2:1. Можливо, він міркував так: оскільки перший гравець виграв на дві партії більше, що складає третю частину необхідних для виграшу 6 партій, то він повинен отримати третю частину, а решту треба роділити порівну.

В) Пояснення парадоксу

Ферма запропонував продовжити гру трьома фіктивними партіями. Таке продовження дасть 8 рівноможливих результатів. 7 з них сприятливі для першого гравця. Значить, справедливим є співвідношення 7:1!

Г) Зауваження

Загальний розв′язок для випадку, коли першому гравцеві треба виграти m партій, а другому - n, теж було знайдено Паскалем і Ферма. Для першого гравця відповідь дається формулою

$$2^{-m-n+1}\sum_{j=m}^{m+n-1}\binom{m+n-1}{j}.$$

В 1654 р. вся наукова (і не тільки) громадскість Парижу говорила про виникнення нової наукм – теоріх ймовірностей. Через кілька місяців в Париж з Нідерландів приїхав молодий геній *Хрістіан Гюйгенс*, щоб обговорити з Паскалем і Ферма ймовірнісні проблеми, якими він теж цікавився. Сталося так, що він не зустрів жодного зних. Паскаль був зайняеий релігією і не приймав гостей, а Ферма жив далеченько від Парижа. Разом з тим з найцікавішими результатами Гюйгенс ознайомився, і незабаром після повернення в Нідерланди він почав писати книгу з теорії ймовірностей. Ця чудова робота, яка, зокрема, містить розв′язок задачі про розділ ставок для трьох гравців, була опублікована в 1657 р. рід назвою “Про розрахунки в азартних іграх” у вигляді частини (п′ятої книги) труда Схоутена “Математичні етюди”. В роботі Гюйгенса 16 сторінок, вона починається з передмови і містить розв′язки 14 задач, пов′язаних з азартними іграми.

4. Парадокс незалежності

А) Історія парадоксу

Спочатку згадаємо математичне визначення незалежності двох подій. Як правило, воно узгоджується зі звичним уявленням про незележність. Разом з тим Бернштейн звернув увагу на такий парадокс.

Б) Парадокс

Розглянемо експеримент з підкиданням двох монет. Нехай подія *А* - “на першій монеті герб”, подія *В* - “на другій монеті герб” і подія *С* - “на одній і тільки на одній монеті випав герб”. Тоді будь-які дві події незалежні, але будь-які дві з них однозначно визначають третю.

В) Пояснення парадоксу

Попарна незалежність не є незалежністю в сукупності. Нагадати відповідне визначення.

Г) Зауваження

Розглянемо таку задачу. Молодий чоловік збпрається зіграти три теннісних матчі зі своїми батьками, і він повинен перемогти два рази підряд. Порядок матчів може бути або “батько – мати – батько”, або “мати – батько – мати”. Молодому чоловікові слід вирішити, якому порядку йому слід віддати перевагу, враховуючи, що батько грає краще матері. Виявляється, другий варіант для нього кращий!

5. Парадокс роздачі подарунків; травми, спричинені кіньми

А) Історія парадоксу

Парадокс роздачі подарунків розглядався в книзі *Ремона де Монмора*, опублікованій в Парижі в 1708 р.

Б) Парадокс

Декілька чоловік вирішили зробити один одному подарунки таким чином. Кожен з них приносить подарунок. Подарунки складаються разом, змішуються і випадково розподіляються серед учасників. Парадоксально, але ймовірність того, що ніхто не отримає свій власний подарунок, менша ½ (крім випадкн, коли учасників двоє, і ця ймовірність дорівнює ½).

В) Пояснення парадоксу

Обчислення показують, що $p_n = 1/2! - 1/3! + \ldots + (-1)^n / n!$. Якщо збирається щонайменше 6 чоловік, то $p_n \approx 1/e \approx 0.3679$ з точністю до чотирьох знаків після крапки. Ймовірність конкретного співпадання дорівнює $1/n$ і прямує до 0 при збільшенні n. Цей парадокс підтверджує , що “по крапельці – море, по стеблинці – стіг”.

Г) Зауваження

і) Розглянемо дещо іншу проблему. Нехай подарунки розподіляються так, що кожен чоловік може отримати будь-який подарунок з однаковою ймовірністю незалежно від розподілу інших подарунків. Нехай подія A полягає в тому, що конкретний чоловік не отримає подарунку. Тоді ймовірність A дорівнює

$$q_n = (n-1)^n/n^n = (1-1/n)^n$$

і прямує так само до e^{-1}. Розглянемо тепер випадок, коли кількість людей n не обов′язково співпадає з кількістю подарунків m. В цьому випадку шукана ймовірність дорівнює

$$q_n = (n-1)^m/n^m = (1-1/n)^m.$$

Якщо m/n прямує до λ $n\to\infty$., то ця ймовірність прямує до $e^{-\lambda}$.Узагальнюючи цей результат, отримаємо: ймовірність того, що конкретна людина отримає рівно k подарунків, прямує до $\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ при $n\to\infty$. Ми отримали добре відомий розподіл Пуассона. Повертаючись до “парадоксу розподілу подарунків”, отримаємо, що кількість людей, яким дістануться їх власні подарунки, також описується законом Пуассона з параметром λ.

і) Поняття розподілу Пуассона вперше з′явилося в книзі *Симеона Дениса Пуассона.* В роботі “ Дослідження про ймовірність судових вироків з кримінальних та цивільних справ”, опублікованій в 1837 р., розділ 81 присвячений застосуванням теорії ймовірностей до судової практики. Можливості широкого застосування і велика важливість пуассонівського розподілу залишилися незрозумілими в середині минулого сторіччя; більш того, про нього майже повністю забули. Але після 1894 р. цей розподіл використовували при вивченні дивного феномену. За 20 років між 1875 і 1894 роками в 14 різних кавалерійських корпусах німецької армії була зібрана статистика трагічних випадків, при яких солдат загинув від удара копита коня. За даними 280 спостережень (280 спостережень = 20 років × 14 корпусів), загинуло 196 солдат, тобто в середньому за рік $\lambda = 0.7$. якби кількість трагічних випадків описувалася розподілом Пуассона з параметром 0.7, то можна було б очікувати, що при 280 спостереженнях в 139 випадках смертей немає, в 97 – 1 смерть, в 34 випадках – 2 смерті і т.д.. а що показала статистика? В дійсності дані були 140, 91, 32 і т.д.. Практика і теорія були настільки узгоджені, що навряд чи можна було чекати більшого.

6. Санкт-Петербурзький парадокс

А) Історія парадоксу

Теорія ймовірностей, яка починалася з дослідження результатів азартних ігор, розвинулася в універсальну теорію, яка знаходила застосування в багатьох областяї життя. Тому не дивно, що майже всі крупні наукові журнали наслідували приклад англійського "Труди по філософії" і регулярно друкували статті з теорії ймовірностей. Все більше і більше вчених вважали, що теорія ймовірностей – це не що інше, як дороговказ у житті, здоровий глузд, представлений в числах. Але на початку ХУІІ сторіччя Академія наук в Санкт-Петербурзі надрукувала статтю, математичні викладки якої, здавалося, такому здоровому глузду суперечили. Статтю написав *Данило Бернуллі*, хоча вперше проблему підняв його двоюрідний брат *Микола Бернуллі*.

Б) Парадокс

Правильна монеті підкидається доти, доки не випаде герб. Якщо це станеться на r-ому підкиданні, то банк виплачує гравцеві 2^r долларів. Постає питання: яким повинен бути внесок гравця за право грати, щоб гра стала справедливою, тобто середнє значення виграшу було нулем? Як не дивно, гіякого скінченного внеску для цього не вистачить!

В) Пояснення парадоксу

Прості підрахунки показують, що середнє значення виграшу дорівнює ∞, тому гра стала б справедливою лише при такому ж внеску. Хоча математичні викладки коректні, результат непрйнятний, і тому деякі математики запропонували модифікації, що можуть бути реалізовані.

і) *Бюффон, Крамер* і інші запропонували виходити з природного припущення про обмеженість ресурсів банку. Так, якщо в банку є мільйон долларів, то середнє значення виграшу дорівнює (з врахуванням того, що $2^{10} > 10^6$)

$$\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 4+\ldots+\frac{1}{2^{19}}\cdot 2^{19}+\left(\frac{1}{2^{20}}+\frac{1}{2^{21}}+\ldots\right)\cdot 10^6 = 19 + 1{,}90\ldots \approx 21.$$

Значить, при вступному внеску гравця 21 доллар гра стає деякою мірою вигідною для банку.

і) *Феллер* запропонував інший підхід. Позначимо через n кількість ігор, в яких гравець брав участь. Гру можна вважати справедливою, якщо відношення сумарного виграшу N_n до сумарного вступного внеску R_n прямує до 1 при $n \to \infty$, точніше, якщо для довільного $\varepsilon > 0$

$$P\{|N_n / R_n - 1| < \varepsilon\} \to 1.$$

Феллер довів, що гра стає справедливою, якщо покласти $R_n = n \log_2 n$. Таким чином, якщо вступний внесок залежить від числа ігор, в яких гравець брав участь, то петербурзький парадокс розв′язується.

7. Парадокс смертності населення. Безвіковий світ атомів і слів

А) Історія парадоксу

Математичні дослідження зі смертності населення і тривалості життя почалися на ранньому періоді розвитку капіталізму завдяки потребам страхових компаній. *Едмунд Галлей* (той самий, що відкрив комету, названу потім його ім′ям) в 1693 р. опублікував статтю про таблиці смертності, яка поклала початок математичній теорії страхування життя. Парадокс, помічений *Даламбером*, показує одну з проблем нової теорії.

Б) Парадокс

За таблицею Галлея середня тривалість життя дорівнює 26 рокам і разом з тим з рівними шансами можна померти до 8 років і прожити більше 8 років.

В) Пояснення парадоксу

Звичайно, мода розподілу зовсім не повинна співпадати з його середнім. За рахунок одного Мафусаїла середній вік може значно зрости.

Г) Зауваження

i) Поняття смертности можна узагальнити при розгляді амортизації виробів чи розпаді атомів. При цьому виникають свої парадокси. В той час як людина не безсмертна і не вічно молода, в природі і суспільстві можна знайти так звані безвікові об′єкти. (Визначення безвіковості – це визначення відсутності післядії.) Людина такою властивістю не наділена, а радіоактивні атоми її мають.

ii) Поняття періоду напіврозпаду безвікових об′єктів стало фундаментальним і деяких інших областях науки. Радіовуглецевий мерод, розроблений американським хіміком *Віллардом Френком Ліббі*, і досі залишається найбільш поширеним методом датування археологічної хронології. В 1960 р. за це відкриття йому було присуджено Нобелівську премію. В 1950 р. ці ідеї були застосовані *М. Свадешем* в лінгвістиці. Він вважав, що не тільки радіоактивні атоми, а й атоми мови, тобто слова, можна вважати безвіковими. Вважається, що період напіврозпаду базового словника мов складає 2000 років. Використовуючи цю ідею, можна визначити дату, коли дві споріднені мови (наприклад, латинська і санскрит) розділилися. Для цього треба тільки знати, яка частина базового словника досі існує в двох мовах. *А. Раун* і *Е. Кангсмаа-Мінн* порівняли угорську і фінську мови. Вони виявили, що ідентичні елементи в цих мовах складають відповідно 21% і 27%. (Обчислення проводилися різними методами.) Звідси було зроблено висновок, що угорська і фінська мови розділилися приблизно 4 – 5 тисяч років тому. Метод Свадеша, розроблений 40 років назад, застосовується дуже часто і відомий як лексикостатистика або глоттохронологія.

ii) Зупинимося ще на одному цікавому питанні, пов′язаному зі смертністю населення. Чи можна оцінити кількість людей, які хоч колись жили на землі? Відповідь була винесена в заголовок статті в “Нью-Йорк Таймс” від 6 жовтня 1981 р.: “9 відсотків людей, які хоч колись жили на землі, живуть зараз”. Твердження належить *С. Голдбергу*.

8. Парадокс закону великих чисел Бернуллі

А) Історія парадоксу

В математиці знайдеться небагато законів, які б хибно трактувалися так часто, як закони великих чисел. Перший закон великих чисел був доведений Якобом Бернулля (1865 – 1705) в книзі “Мистецтво припущень”, яка була видана тільки в 1713 р.. Сам термін “закон великих чисел” ввів Пуассон аж в 1837 р.. Дати суть закону.

Б) Парадокс

Гравці часто впевнені, що коли правильна монета багато разів випадає гербом, то за законом великих чисел ймовірність випадання аверсу зростає. Інакше порушувалось би те, що при великій кількості підкидань випадання герба і аверсу відбуваються приблизно однаково часто. З другого боку, монета пам′яті не має, і вона не може знати, скільки разів вона випадала гербом. З цієї причини ймовірність випадання герба при кожному підкиданні дорівнює ½, навіть якщо монета випала гарбом 1000 разів підряд. Чи не суперечить це закону великих чисел?

В) Пояснення парадоксу

Вся суть в тому, що значить “приблизно”. Гравець, який вважає, що малою повинна бути *різниця* між кількостями випадань герба і аверсу, помиляється. Закон Бернулля стверджує, що *відношення* цих кількостей приблизно дорівнює 1. Іншими словами, *різниця логарифмів* цих кількостей прямує до 0. А відсутності пам′яті у монети суперечила б мала різниця цих кількостей.

Г) Зауваження

В зв′язку зі сказаним виникає таке питання. Яку максимальну довжину серії гарбів ми можемо очікувати при підкиданнях монети? Якщо n=100, то можна очікувати серію з 6 – 7 гербів підряд, якщо n=1000, то можна очікувати 9 – 10 гербів підряд, і 19 – 20 при $n=10^6$. Паул Ердеш і Альфред Реньї довели, що серія довжини $\log_2 n$ спостерігається з імовірністю, що прямує до 1 при $n\to\infty$.

9. Парадокс де Муавра

А) Історія парадоксу

Однією з видатних фігур в теорії ймовірностей є *Абрахам де Муавр* (1667 – 1754). Цей математик, який народився у Франції, після скасування Нантського едикту, що надавав гугенотам свободу віросповідання, переїхав до Англії. Там у 1718 р. була надрукована його основна робота "Доктрина шансів". В 3-у виданні цієї книги в 1756 р. де Муавр так писав про своє відкриття, яку містило в собі значно більше, ніж закон великих чисел Бернуллі: "…Візьму на себе сміливість стверджувати, що це найскладніша проблема про випадковість…". Без сумніву, відкритий де Муавром нормальний розподіл став наріжним камерем науки про випадкове.

Б) Парадокс

За законом великих чисел, ймовірність того, що при підкиданні монети кількість випадань герба приблизно дорівнює кількості випадань аверсу, прямує до одиниці при збільшенні числа підкидань (тут наближена рівність чисел значить, що їх відношення прямує до1). З іншого боку, ймовірність того що ці кількості рівні, прямує до нуля (показати). Розрив між цими двома фактами був оточений "атмосферою парадоксальності", доки де Муавр не побудував над ним математичний місток.

В) Пояснення парадоксу

Нехай H_n і T_n позначають кількості випадань герба і аверсу відповідно в n підкиданнях монети. За законом великих чисел Бернуллі, ймовірність того, що різниця H_n - T_n стає нескінченно малою відносно n, прямує до 1. Де Муавр же побачив, що величина $|H_n - T_n|$ не є нескінченно малою відносно $\sqrt{n}$. Нехай x - довільне додатне число, і нехай $A_n(x)$ позначає ймовірність того, що $|H_n - T_n| < x\sqrt{n}$. За де Муавром, $A_n(x)$ прямує з ростом n до величини $A(x)$, яка знаходиться між 0 та 1. Ця функція і є тим математичним містком, про який говорилося вище.

Г) Зауваження

ii) Точний вигляд функції $A(x)$ такий:

$$A(x) = \sqrt{2/\pi}\int_0^x e^{-u^2/2}du$$

Використовуючи цю формулу, теорему Муавра можна записати у вигляді

$$\lim_{n\to\infty} P\{|H_n - T_n| < x\sqrt{n}\} = A(x),$$

або

$$\lim_{n\to\infty} P\{H_n - T_n < x\sqrt{n}\} = \Phi(x),$$

де

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du .$$

ii) Теорему, про яку ми говорили, можна узагальнювати в різних напрямках. Представники математичної школи Санкт-Петербурга на чолі з *П.Л.Чебишевим* (1821 – 1894), особливо *А.М.Ляпунов* (1857 –1918) і *А.А.Марков* (1856 - 1922) отримали загальне визнання за свої роботи по узагальненню теореми Муавра-Лапласа. Нехай X_1, X_2,… - взаємно незалежні однаково разподілені випадкові величини зі скінченними математичним сподіванням M та дисперсією D^2. Нехай також $S_n = X_1 + X_2 +\ldots+X_n$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} P\{S_n < nM + xD\sqrt{n}\} = \Phi(x) .$$

Це так звана *центральна гранична теорема*, найбільш важлива з усіх граничних теорем теорії ймовірностей (тому вона й була названа “центральною”, так її вперше назвав Джордж Пойа). В граничних теоремах, як правило, розглядаються асимптотичні розподіли різних функцій (наприклад, суми, добутку, максимуму і т.д.) випадкових аргументів. Центральна гранична теорема і її узагальнення пояснюють, чому в природі нормальний розподіл зустрічається так часто, особливо при вивченні величин, складених з багатьох (“майже”) однаково розподілених (“майже”) незалежних випадкових компонент. Слід підкреслити, що в природі такі “композиції” з випадкових величин не завжди утворені їх сумами, тому вивчення поведінки інших функцій є дуже важливим. Пуанкаре якось з сарказмом зауважив, що всі вірять в універсальність нормального розподілу: фізики думають, що математики довели його логічну необхідність, а математики вважають, що фізики перевірили це лабораторними експериментами.

10. Парадокс Бертрана

А) Історія парадоксу

Жорж Бюфффон (1707 – 1788) в роботі, опублікованій в 1733 р., поклав початок новому напрямку в теорії ймовірностей. Розв′язок знаменитої “задачі про голку”, який обговорювався в цій статті, потребував використання скоріше геометричного, а не комбінаторного методу. В задачах такого типу вважається, що випадкові точки рівномірно розподілені в деякій області. Ймовірність попадання в довільну частину даної області пропорційна її площі (довжині чи об′єму). Таким чином, для підрахунку ймовірності треба лише знайти відношення “сприятливої” площі до “всієї” площі. Ймовірності такого типу приводять до ряду парадоксів. Наприклад, ймовірність влучити в центр мішені, очевидно, дорівнює 0. З іншого боку, влучити в цю точку можна і, значить, ми повинні відрізняти події, що відбуваються з імовірністю 0, і неможливі події. Певною мірою дивним здається і такий факт: події “влучити як мінімум в одну точку зі скінченної кількості заданих” і “влучити в задану точку” мають однакову ймовірність, а саме 0. Інша дивина: взаємно однозначне перетворення може принципово змінити шанси. Напрклад, якщо ми випадковим чином вибираємо точку на інтервалі (0,1), то шанси вибрати число, яке менше ½, дорівнюють 50%. Але якщо ці числа піднести до квадрату і рівномірно вибирати з цих квадратів, то шанси збільшаться. Звичайно, перша відповідь, тобто 50%, більш природна. Але в інших задачах вибір між природньою і неприродньою відповіддями може виявитися більш складним. Такий вибір не завжди можливий на основі лише логічних міркувань без врахування даних практики. Саме в цьому суть такого парадокса, опублікованого в книзі “Числення ймовірностей” (1889) *Жозефа Луї Бертрана*.

Б) Парадокс

В деякому колі випадково вибирається хорда. Знайти ймовірність того, що ця хорда довша, ніж сторона правильного трикутника, вписаного в це коло. Парадокс стверджує, що ця ймовірність визначаєтьсч неоднозначно, оскільки різні методи приводять до різних результатів.

Перший метод

Випадковим чином в даному крузі вибирається точка, яка буде серединою хорди. Тоді відповідь буде ¼.

Другий метод

Виходячи з міркувань симетрії, будемо вважати, що один кінець хорди фіксований, а другий вибирається рівномірно на колі. Тоді відповідь буде 1/3.

Третій метод

Виберемо точку випадковим чином рівномірно на радіусі кола і візьмемо хорду, яка перпендикулярна цьому радіусу і проходить через вибрану точку. Тоді відповідь буде ½.

В) Пояснення парадоксу

Отримання різних результатів здається парадоксальним, оскільки було впевнення, що слова “рівномірний випадковий вибір” однозначно визначають шукану ймовірність. Парадокс показує, що можливі різні способи рівномірного вибору, причому кожен спосіб має вигляд “природного”. Кожен з трьох розглянутих способів використовує рівномірний розподіл (в крузі, на колі і на радіусі круга).

Г) Зауваження

Ми розглянули три методи вибору випадкової хорди, але існує багато інших таких же природних методів. Наприклад, якщо ми виберемо точку з рівномірним розподілом в заданому крузі, а потім проведемо через цю точку хорду в напрямку, рівномірно розподіленому серед всіх можливих і незалежному від вибору точки, то отримаємо відповідь $1/3 + \sqrt{3}/2\pi = 0.609\ldots$ Ще більшу ймовірність (0.7449…) ми отримаємо, якщо випадкова хорда є з′єднанням двох випадкових точок на колі. Ще один, менш природний, спосіб такий. Проведемо коло радіуса r з тим же центром, що й у початкового кола радіуса R ($r>R$) і виберемо точку, рівномірно розподілену в крузі радіуса r. Проведемо пряму через цю точку в напрямку, рівномірно розподіленому серед усіх можливих і незалежному від вибору точки. Тоді задачу можна поставити так. Якщо пряма перетинає круг радіуса R, то чому дорівнює ймовірність того, що утворена при цьому хорда довша вже не раз згадуваної сторони правильного вписаного трикутника? Відповідь отримується просто. Якщо r зростає від $r = R/2$ до $r = \infty$, то шукана ймовірність спадає від 1 до ½.

11. Ще кілька парадоксів

А) Парадокс подій, що відбуваються майже напевно

Розглянемо події, що відбуваються з імовірностями 0.99 і 0.9999 відповідно. Можна сказати, що обидві ймовірності практично однакові, обидві події відбуваються майже напевно. Не дивлячись на це, в деяких випадках різниця стає помітною. Розглянемо, наприклад, незалежні події, які можуть відбуватися в будь-який день протягом року з імовірністю $p = 0.99$. В такому випадку ймовірність P того, що вони відбуваються щодня протягом року, менша 0.03. Якщо ж $p = 0.9999$, то $P = 0.97$.

Б) Парадокс імовірності і відносної частоти

Історія, яка приписують Джорджу Пойа, показує, як не слід інтерпретувати частотну концепцію ймовірності. Доктор Тел (телепатії), оглянувши пацієнта, похитав головою. “Ви дуже серйозно хворі”, - сказав він, - “з десяти чололвік з такою хворобою виживає тільки один”. У пацієнта ця інформація викликала стан паніки, і доктор Тел вирішив його заспокоїти: “Але Вам дуже поталанило, що аи прийшли до мене, сер. У мене вже померло від цієї хвороби дев′ять пацієнтів, так що Ви виживете.”

В) Парадокси, пов′язані з підкиданням монети

ii) Припустимо, що ми підкидаємо правильну монету доти, доки не випадуть послідовно ГГ або ГР. Очевидно, ймовірність того, шо ГГ з′явиться раніше, ніж ГР, дорівнює ймовірності того, що раніше з′явиться ГР. Не дивлячись на це, для появи ГГ потрібно в середньому більше підкидань, ніж для появи ГР. Серія ГГ з′являється в середньому через 6 підкидань, а ГР – через 4. Якщо порівнювати серії ГРГР і РГРР, то відміна буде більшою. Ймовірність того, що ГРГР з′явиться раніше, ніж РГРР, дорівнює 9/14 > 1\2, але середня кількість підкидань, які треба зробити до появи ГРГР, все ж більша, ніж до появи РГРР. (Перша дорівнює 20, а друга лише 18.) Значить, навіть якщо ймовірність того, що подія *А* відбудеться швидше, ніж подія *В*, більша ймовірності протилежної події, може статися так, що до появи *А* доведеться чекати довше, ніж до появи *В*.

ii) Ще один парадокс такий. Якщо при підкиданні правильної монети ми хочемо отримати задану послідовність довжини 3, то середня кількість підкидань до отримання будь-якої з послідовностей ГГР, РГГ, РРГ і ГРР доівнює 8, а у всіх інших випадках вона більша. Порівняємо ці серії так:

α) ймовірність того, що ГГР з′явиться раніше, ніж РГГ, дорівнює 1\4;

β) ймовірність того, що РГГ з′явиться раніше, ніж РРГ, дорівнює 1\3;

γ) ймовірність того, що РРГ з′явиться раніше, ніж ГРР, дорівнює 1\4;

δ) ймовірність того, що ГРР з′явиться раніше, ніж ГГР, дорівнює 1\3.

Таким чином, почавши з серії ГГР, ми знов повернулися до неї, хоча на кожному кроці ймовірності порівняння були меншими ½.

Г) Парадокс умовної ймовірності

Існують події *А*, *В* і *С* такі, що

$$P(A/B) < P(A/\overline{B}),\quad P(A/BC) > P(A/\overline{B}C),\quad P(A/B\overline{C}) > P(A/\overline{B}\,\overline{C}).$$

Це здається парадоксальним, оскільки можна подумати, що $P(A/B)$ є середнім $P(A/BC)$ і $P(A/B\overline{C})$ і, аналогично, $P(A/\overline{B})$ є середнім $P(A/\overline{B}C)$ і $P(A/\overline{B}\,\overline{C})$, а середнє двох менших величин повинне бути меншим середнього більших величин. Пояснення в тому, що $P(A/B)$ і $P(A/\overline{B})$ є зваженими середніми вказаних імовірностей, причому відповідні вагові коефіцієнти в обох випадках різні:

$$P(A/B) = P(C/B)P(A/BC) + P(\overline{C})/B)P(A/B\overline{C}),$$

$$P(A/\overline{B}) = P(C/\overline{B})P(A/\overline{B}C) + P(\overline{C})/\overline{B})P(A/\overline{B}\,\overline{C}).$$

Разом з тим при незалежних *В* і *С* парадоксу не виникає.

Д) Парадокс випадкових тривалостей очікування

Припустимо, що дві випадкових події відбуваються через випадковий час *X* і *Y*. Парадоксально, але може трапитися так, що $P(X>Y)\geq 0.99$, але для кожного фіксованого t $P(X<t)>P(Y<t)$. Наприклад, це так, якщо *Y* має рівномірний розподіл на інтервалі (0,1), $X = Y + (1-Y)/1000$ з імовірністю 0.99 і $X = Y/1000$ з імовірністю 0.01. Ця ситуація неможлива, якщо *X* і *Y* незалежні.

Е) Парадокс транзитивності

Два гравці А і В грають в таку гру. На першому кроці гравець А записує числа з набору 1, 2, 3,…, 18 на 3-ох гральних кубиках по одному на кожну з граней (кожне число використовується лише один раз). На другому кроці В, уважно вивчивши ситуацію, вибирає один з кубиків. На третьому кроці А вибирає один з кубиків, що залишилися. На останньому кроці вони підкидають кубики і виграє той, у кого випало більше число.

Здається, що гра вигідна для В, оскільки в будь-якій ситуації він може вибрати кращий кубик, як би там не мудрив гравець А. Значить, канси виграти для В складають щонайменше 50%. Але справедливе саме протилежне: гравець А може так занумерувати кубики, що саме він перемагає з імовірністю 21/36. Можливий варіант такий:

18, 10, 9, 8, 7, 5 на гранях першого кубика

17, 16, 15, 4, 3, 2 на гранях другого кубика

14, 13, 12, 11, 6, 1 на гранях третього кубика.

Якщо В вибере 1-ий, 2-ий чи 3-ій кубики, то А візьме 3-ій, 1-ий чи 2-ий відповідно і виграє з ймовірністю 21/36. Суть цього парадоксу в тому, що випадкові величини не завжди можна впорядкувати так, щоб вони були більші одна за другу з імовірністю щонайменше 50%.

Є) Парадокс Бореля

Нехай випадкова точка рівномірно вибирається на поверхності кулі (наприклад, на Землі, вважаючи, що вона – куля). Взагалі кажучи, положення точки задається її широтою і довготою. При заданній широті довгота розподілена рівномірно, але при фіксованій довготі розподіл широти рівномірним не буде. (Щільність цього розподілу пропорційна косинусу довготи.) Значить, щільність випадкової точки не однакова, коли вона знаходиться на грінвічському меридіані чи на екваторі, хоча і грінвічський меридіан, і екватор є великими колами на кулі, і тому їх роль має однаковий вигляд.

Ще одна проблема є аналогічним парадоксом. Нехай X і Y - дві незалежні випадкові величини зі стандартним нормальним розподілом. Вектор (X,Y) можна розглядати як випадкову точку на площині. Нехай R і φ - її полярні координати. Вважаючи, що $X=Y$, отримаємо, що розподіл $R^2 = 2X^2$ є розподілом подвоєного квадрату випадкової величини зі стандартним нормальним розподілом. В той же час, при умові, що $\varphi = \pi/4$ або $\varphi = 5\pi/4$, розподіл випадкової величини $R^2 = X^2 + Y^2$ такий же, як суми квадратів двох незалежних випадкових величин зі стандартним нормальним розподілом (оскільки R і φ незалежні). Значить, для R^2 ми отримали зовсім різні розподіли, коли $X = Y$ і коли $\varphi = \pi/4$ чи $\varphi = 5\pi/4$, що здається парадоксальним, оскільки обидві умови значать одне й те ж, тільки в першому випадку умова сформульована в звичних координатах, а в другому – в полярних.

Ж) Парадокс умовних розподілів

Нехай X і Y - випадкові величини і $f(x, y)$ - функція двох змінних така, що при будь-якому фіксованому y величина $f(X, y)$ не залежить від Y. Чи справедливо, що в цьому випадку $f(X, Y)$ також не залежить від Y? Простий приклад показує, що це не так. Нехай $X = Y$ і X рівномірно розподілена на інтервалі (0,1). Припустимо, що $f(x, y) = y$, якщо $x = y$ і $f(x, y) = 0$ в протилежному випадку. Тоді з імовірністю 1 $f(X, y)$ дорівнює 0 і, як наслідок, не задежить від Y. Разом з тим $f(X, Y) = Y$, очевидно, від Y залежить.

І) Як грати в програшну гру

Припустимо, що в деякій грі кількість випробувань n завжди парна. Гравець А виграє очко з імовірністю $p = 0.45$, а його суперник В – з імовірністю 0.55. Щоб виграти гру, гравець повинен набрати більше половини очок. Якщо гравець А може вибирати значення n, то що він повинен зробити? Як не дивно, значення $n = 2$ для нього кращим не буде. В цьому випадку ймовірність виграшу для нього всього 0.452 = 0.2025. Якщо ж кількість випробувань більша, то гравець А може опинитися в кращій ситуації. Легко встановити, що оптимальним є вибір $n = 10$. Такий результат на перший погляд суперечить загальному "принципу": чим раніше ми припинимо програшну гру, тим краще. Припустимо, наприклад, що нам потрібно 20 доларів, а маємо ми тільки 10. Ми збираємося отримати потрібну суму, зігравши в рулетку. Оскільки рулетка є програшною грою, рекомендується зробити мінімальну можливу кількість випробувань, тобто ми повинні поставити зразу всі наші гроші, наприклад, на "червоне". В цьому випадку шанси виграти дорівнюють 18/38 (в американській рулетці є два нулі: 0 і 00). З іншого боку, якщо ми кожного разу будемо ставити лише по одному долару, то досягнемо своєї мети з імовірністю 0.11.

Ї) Абсурдні результати Льюіса Кєррола

Знаменитий письменник Льюіс Кєррол був великим любителем абсурдів як у математиці, так і в літературі. В роботі "Абсурдна література" *Нікола Балоте* розглядає його як головного предтечу сучасного абсурду. В роботі Кєррола "Проблеми на подушці" (1894) можна знайти такий абсурдний результат.

У мішку знаходяться дві кулі, які можуть бути або білими (Б), або червоними (Ч). Треба відгадати їх колір, не заглядаючи в мішок. За Керролом, єдино правильною відповіддю є: один Ч і один Б. Він пояснює це так. Коли у мішку знаходяться 2 червоні і 1 біла куля, ймовірність витягти Ч дорівнює 2/3. Навпаки, якщо в мішку є три кулі і ймовірність витягти Ч дорівнює 2/3, то в мішку 2 червоні кулі і 1 біла.

Тепер покладемо Ч в мішок, в якому спочатку було дві кулі. В такому випадку є чотири рівноможливі комбінації куль: ЧЧЧ, ЧБЧ, ЧЧБ і

ЧББ. Якщо насправді має місцу перша комбінація, то ймовірність витягти Ч дорівнює 1, для другої і третьої комбінації ця ймовірність дорівнює 2/3, а для останньої – ¼. Значить, ймовірність витягти Ч дорівнює ¼(1 + 2/3 + 2/3 + 1/3) = 2/3. У такому випадку у мішку повинні бути дві червоні і одна біла кулі. Оскільки одна з червоних є покладеною нами, то з самого початку там були одна біла і одна червона кулі. Цей результат, звичайно, абсурдний, так що міркування повинні містити помилку. Але в чому ця помилка полягає?

Ще одні міркування також приводять до помилкового результату. Двоє з трьох в′язнів (A, B і C) повинні бути страчені. Вони це знають, але не можуть здогадатися, кому з них поталанить. В′язень A міркує так: "Ймовірність, що мене не стратять, дорівнює 1/3. Якщо я попрошу охоронця назвати ім′я (відмінне від мого) того, кого буде страчено, то залишаться тільки дві можливості. Другий, кого стратять, це або я, або ні, і тому шанси, що я виживу, збільшуються до ½". Але справедливо також, що вже перед тим, як спитати охоронця, A знає, що одного з його компаньйонів напевно стратять, так що охоронецуь не повідомляє A ніякої нової інформації про його долю. Чому ж тоді ймовірність страти змінилася?

(Відповідь дуже проста: ймовірність зовсім не змінилася. В′язень випустив те, що охоронець називає, наприклад, B з імовірністю ½, якщо збираються стратити B і C, але ця ймовірність дорівнює 1, коли жертвами є A і B. Так що насправді шанси для A уникнути страти дорівнюють відношенню ймовірності в останньому випадку до суми ймовірностей в обох випадках: 1/6(1/6 + 1/3) =1/3.)

Д.З.

Решить задачи:

1. Частинка у ящику

Частинка починає рухатись у випадковому напрямку у двовимірному ящику зі стороною 1. Чому дорівнює середня довжина вільного пробігу частинки (тобто відстань, яку проходить частинка між двома дотиками зі стінками ящику.

2. Молодша донька

Нехай ви зустрічаєте на вулиці незнайомця та питаєте його "скільки у вас дітей?".

Він відповідає "двоє". Ви питаєте "чи старша дитина-донька?", він відповідає "так".

Яка ймовірність того, що у нього дві доньки. Яка була б ймовірність цієї події, якщо друге питання було "у вас є донька" і він відповів би "так"

3. Дві лікарні

Нехай є дві лікарні – велика та мала. У великій лікарні протягом тижня народилося 1000 дітей, а у малій 100. В який з лікарень ймовірність того, що кількість хлопчиків та дівчат буде однаковою, буде більшою? Ймовірності народження хлопчика та дівчинки вважаються однаковими.

4. Гра в додекаедри

Нехай є три додекаедри (двадцятигранники), на гранях яких нанесено числа від 1 до 20. Гравець кидає одну таку гральну кість, а ділер - дві. Якщо кількість очок у гравця знаходиться між кількостями очок, які випали у ділера, то гравець виграє, у іншому разі (включаючи нічиї) гравець програє. Знайти ймовірність виграшу. Як зміниться ймовірність виграшу, якщо у цій грі використовуються звичайні шестигранні кості?

5. Кіллери та пацифісти

Нехай ви становитесь громадянином деякого міста, в якому проживають K кіллерів та N пацифістів. Якщо один пацифіст зустрічає іншого, нічого не відбувається. Якщо кіллер зустрічає пацифіста, то він вбиває його. Якщо зустрічаються два кіллера, то вони вбивають один одного. Яка ймовірність вижити в такому місті.

6. Флеш

Яка множина карт при грі в покер (гра ведеться колодою в 52 карти) має відносно більшу кількість комбінацій “flush” (всі карти однієї масті)
а) коли перша карта- туз б) коли є піковий туз в) коли є принаймні один туз.

7. Планування сім’ї

Нехай деякі сім’ї народжують дітей доти, доки не народиться хлопчик, після цього вони припиняють народжувати дітей. Обчислити частку хлопчиків та дівчат для сукупності з 1000 сімей, які притримуються таких правил.

8. Дартс

У гравця в дартс (кидання дротиків у мішень) другий кидок виявився гірший (тобто дальший від центру мішені) за перший. Яка ймовірність того, що третій кидок також виявиться гірший за перший).

9. Російська рулетка

Нехай є шестизарядний револьвер, в який послідовно вкладається три патрони, барабан прокручується і починається гра між двома гравцями за слідуючим правилом. Перший гравець стріляє собі в голову. Якщо перший гравець залишається живим, то хід переходить до другого гравця і так далі. Які шанси залишитись живим для першого та другого гравців? Як зміниться відповідь, якщо на початку гри є три холостих та три бойових патрони, вони перемішуються, та заряджаються у револьвер.

10. Супер-гра

В одному з американських шоу (схожому на російське “поле чудес” фіналісту пропонується наступна гра. Є три однакові ящики, в одному з яких є ключі від машини, а два інших порожні. Гравець навмання вибирає один з ящиків, але не відкриває його. Ведучий показує гравцю, що один з ящиків, що лишилися, порожній і пропонує гравцю замінити ящик, який він вибрав, на той, що лишився. Чи варто гравцю погоджуватись на таку пропозицію?

11. Ведуча цифра

Нехай x та y є незалежними випадковими величинами, рівномірно розподіленими на інтервалі [0;1]. Знайти ймовірність того, що ведуча цифра співвідношення y/x дорівнює 1.

12. Більше-менше

На двох картках, які лежать на столі обличчям донизу, написані довільні числа. Гравець навмання бере одну з карток, дивиться на число і намагається вгадати, більше воно чи менше за те, яке написане на іншій картці. Чи існує стратегія гри, більш ефективна, ніж просте вгадування?

13. Гра в шмен

Азартна гра під такою дивною назвою була поширена у кримінальному світі колишнього СРСР. Правила її дуже прості. Один з гравців навмання вибирає купюру серед тих, що у нього є у наявності, та тримає її у руці (нехай номер купюри складається з восьми знаків). Другий гравець називає дві цифри від 1 до 8 на свій розсуд (нехай це буде наприклад 3 та 6). Після цього другий гравець обчислює суму цифр, які стоять на вказаних ним позиціях у номері купюри (тобто третьої та шостої) за модулем 10, а перший гравець знаходить суму за модулем 10 всіх інших цифр купюри. Виграє той, в кого сума більша (у разі співпадання сум – нічия). Чи є дана гра справедливою (тобто чи однакові ймовірності виграшу для обох гравців).

14. Ділимість на три

Нехай підкидається десять гральних костей. Яка ймовірність того, що сума очок ділиться на 3?

15. Вписаний трикутник

На колі випадковим чином вибирається три точки A, B та C. Знайти ймовірність того, що трикутник ABC- гострокутний.

16. Дві хорди

На колі випадковим чином вибрано чотири точки A, B,C,D. Знайти ймовірність того, що хорди AB та CD перетинаються, не застосовуючи інтегрування.

17. Переплутані шляпи

Дванадцять осіб здали свої шляпи в гардероб. При поверненні гардеробник вибирав шляпи випадковим чином. а) Знайти ймовірність того, що ніхто не отримав своєї шляпи. б) Знайти середню кількість осіб, які отримали свої шляпи.

18. Божевільна бабуся

Йде посадка у 100-місцевий літак. В черзі стоять 100 пасажирів. Першою стоїть божевільна бабуся, яка випадковим чином вибирає собі місце в салоні літаку. Всі інші пасажири- нормальні люди і кожен з них сідає надвоє місце, яке зазначено у квитку, якщо воно вільне і на будь-яке з вільних місць в іншому разі. Яка ймовірність того, що останній пасажир в черзі сяде на своє місце?

19. Дві кулі

В урні знаходяться дві кулі- чорна та біла. Навмання вибирається одна куля, яка потім повертається в урну ї ще додається куля такого самого кольору. Така процедура повторюється 50 разів. Знайти найбільш ймовірне число білих куль.